УДК 519.863

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ КАНАЛОВ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ[1)]

М.В. ГОСТЕВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: mvgostev@kpfu.ru

ON NUMERICAL METHOD FOR SOLUTION OF TRANSPORTATION NETWORKS LINKS CAPACITY OPTIMAL SELECTION PROBLEM

M.V. GOSTEV

Kazan Federal University

Аннотация

Рассматривается задача выбора пропускных способностей каналов транспортных сетей, минимизирующего суммарное время транспортировки по всем каналам сети при ограничении на стоимость сети. Предложен эффективный численный метод решения задачи.

Ключевые слова: оптимизация, транспортные сети, пропускные способности.

Summary

The problem of the transportation networks links capacity selection is considered. Total travel time on all links is minimized, subject to the network cost constraint. The effective numerical method for the problem solution is presented.

Key words: optimization, transportation networks, capacity.

Введение

Одной из важнейших проблем проектирования транспортных сетей, наряду с выбором топологической структуры сети и распределением транспортных потоков по сети, является проблема выбора пропускных способностей каналов транспортировки [1]. Проблема относится к так называемым непрерывным задачам проектирования сети, в которых топология задается в качестве исходных данных, и которые касаются параметризации каналов транспортировки [2,3].

От пропускной способности канала зависит время транспортировки по нему. Время транспортировки — главный критерий оценки канала [1-3]. Увеличение пропускных способностей каналов транспортной сети способствует уменьшению суммарного времени транспортировки по сети, а также повышению общей пропускной способности сети. Однако увеличение пропускных способностей каналов транспортировки приводит к увеличению стоимости всей сети. Сооружение и использование каналов транспортировки с меньшей пропускной способностью требует меньших затрат, но время транспортировки по таким каналам увеличивается.

Задача состоит в выборе таких пропускных способностей каналов, чтобы суммарное время транспортировки по всем каналам сети было минимальным, а их суммарная стоимость не превышала заданной величины.

1. Постановка задачи

Топологическая структура транспортной сети задается в виде графа $G = (V, U)$, где множество вершин $V = (v_1, \ldots, v_n)$ графа представляет множество транспортных узлов, а множество ребер $U =$

[1)] Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности.

$(u_1, \ldots, u_m)$ — множество каналов транспортировки. Каждое ребро представлено двумя дугами, соответствующими двум противоположным направлениям между двумя смежными узлами.

Для вычисления времени транспортировки по каналу транспортной сети предложены и используются разнообразные модели (см., например, обзор [4]). В [5,6] при решении аналогичной задачи использовалась модель Бюро общественных дорог. В данной работе будем использовать модель Дэвидсона [7,8]. Согласно этой модели, время транспортировки t_k по каналу $u_k \in U$ выражается как

$$t_k = t_{0k} \left(1 + J \frac{f_k}{c_k - f_k} \right), \tag{1}$$

где c_k — пропускная способность канала $u_k \in U$, f_k — поток по каналу $u_k \in U$, t_{0k} — время транспортировки по каналу без задержек и помех (так называемое время транспортировки в свободном потоке [4,7,8]), $k = 1, \ldots, m$, J — параметр модели.

Для транспортных сетей типичен случай несимметричных потоков, однако пропускные способности дуг в двух направлениях, составляющих ребро, как правило, должны быть одинаковыми. Принимая во внимание это условие и используя модель (1), получаем следующее выражение для суммарного времени транспортировки по всем каналам сети:

$$T(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} \left[t'_{0k} \left(1 + J \frac{f'_k}{c_k - f'_k} \right) + t''_{0k} \left(1 + J \frac{f''_k}{c_k - f''_k} \right) \right],$$

где c_k — пропускная способность каждой из двух дуг ребра $u_k \in U$, f'_k и f''_k — потоки, проходящие по дугам ребра $u_k \in U$ в двух его противоположных направлениях, t'_k и t''_k — время пути в свободном потоке по соответствующим дугам ребра $u_k \in U$, $k = 1, \ldots, m$.

Определим

$$\bar{f}_k = \max\{f'_k, f''_k\}, k = 1, \ldots, m.$$

Считаем, не ограничивая общности, что все $\bar{f}_k > 0$.

Будем предполагать, что стоимости s_k каналов $u_k \in U$ линейно зависят от пропускных способностей каналов, т. е.

$$s_k(c_k) = a_k c_k + b_k,$$

где $a > 0$, $b \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$, а ограничение на стоимость сети составляет величину S.

Задача оптимального выбора пропускных способностей дуг графа транспортной сети формулируется следующим образом:

$$T(c_1, \ldots, c_m) \longrightarrow min$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{m} (a_k c_k + b_k) \leqslant S, \tag{2}$$

$$c_k > \bar{f}_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Определим

$$S_0 = \sum_{k=1}^{m} (a_k \bar{f}_k + b_k).$$

Нетрудно убедиться, что для $S > S_0$ решение поставленной задачи существует и единственно.

2. Некоторые оценки решения задачи

Для отыскания решения задачи составим функцию Лагранжа:

$$T(c) = \sum_{k=1}^{m} \left[t'_{0k} \left(1 + J \frac{f'_k}{c_k - f'_k} \right) + t''_{0k} \left(1 + J \frac{f''_k}{c_k - f''_k} \right) \right] + \lambda \left[\sum_{k=1}^{m} (a_k c_k + b_k) - S \right],$$

где $\lambda \geqslant 0$ — множитель Лагранжа.

Согласно правилу множителей Лагранжа решением задачи оптимизации является решение следующей системы уравнений:

$$J\frac{t'_{0k}f'_k}{(c_k - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(c_k - f''_k)^2} - \lambda a_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k c_k + b_k) - S = 0, \tag{5}$$

состоящей из $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными переменными c_k, $k = 1, \ldots, m$, и λ.

Функции в левой части уравнений (4) являются строго монотонно убывающими по c_k при $c_k > \bar{f}_k$, $k = 1, \ldots, m$, поэтому каждое уравнение (4) при фиксированном значении $\lambda > 0$ имеет единственное решение.

Обозначим через $\hat{c}_k(\lambda)$ корень k-го уравнения в (4) при фиксированном значении $\lambda > 0$, $k = 1, \ldots, m$, и определим

$$\bar{c}_k(\lambda) = \bar{f}_k + \sqrt{J\frac{\bar{f}_k(t'_{0k} + t''_{0k})}{\lambda a_k}}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для произвольного* $\lambda > 0$ *выполняются неравенства:*

$$\hat{c}_k(\lambda) \leqslant \bar{c}_k(\lambda), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Будем считать, для определенности, что $\bar{f}_k = f'_k$, и $\bar{f}_k \geqslant f'_k$, следовательно, $\bar{f}_k \geqslant f'_k$. Тогда, после подстановки в (4) выражения для $\bar{c}_k(\lambda)$, получим:

$$J\frac{t'_{0k}f'_k}{(\bar{c}_k(\lambda) - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(\bar{c}_k(\lambda) - f''_k)^2} - \lambda a_k = \frac{t'_{0k}\lambda a_k}{t'_{0k} + t''_{0k}} + \frac{J f''_k t''_{0k}}{\bar{f}_k + t''_k + \sqrt{\frac{J\bar{f}_k(t'_{0k}+t''_{0k})}{\lambda a_k}}} - \lambda a_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f''_k t''_{0k} a_k}{\bar{f}(t'_{0k} + t''_{0k})} - \frac{t''_{0k}\lambda a_k}{t'_{0k} + t''_{0k}} = \frac{t''_{0k}\lambda a_k}{t'_{0k} + t''_{0k}}(\frac{f''_k}{\bar{f}_k} - 1) \leqslant 0.$$

В то же время при $c_k = \bar{c}_k(\lambda)$ функции из системы (4) равны нулю. Так как эти функции монотонно убывают, то

$$J\frac{t'_{0k}f'_k}{(c_k - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(c_k - f''_k)^2} - \lambda a_k > 0,$$

если $c_k < \bar{c}_k(\lambda)$, и

$$J\frac{t'_{0k}f'_k}{(c_k - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(c_k - f''_k)^2} - \lambda a_k > 0,$$

если $c_k > \bar{c}_k(\lambda)$. Следовательно, для всех $k = 1, \ldots, m$, выполняется утверждение 1. ■

Таким образом, для любого $\lambda > 0$ корни $\hat{c}_k(\lambda)$ системы уравнений (4) находятся на соответствующих полуинтервалах $(f_k, \bar{c}_k(\lambda)]$, $k = 1, \ldots, m$, т. е. $f_k < \hat{c}_k(\lambda) \leqslant \bar{c}_k(\lambda)$.

Определим, далее,

$$\bar{\lambda} = J\frac{\sum_{k=1}^{m} a_k \bar{f}_k(t'_{0k} + t''_{0k})}{(S - S_0)^2}$$

при $S > S_0$, и обозначим через λ^* значение λ при оптимальном решении задачи, то есть такое λ, при котором для $c_k = \hat{c}_k(\lambda^*)$, $k = 1, \ldots, m$, выполняется (5).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Имеет место неравенство:*

$$\lambda^* \leqslant \bar{\lambda}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 > \lambda_2$, то для всех $k = 1, \ldots, m$ выполняется неравенство

$$\hat{c}_k(\lambda_1) < \hat{c}_k(\lambda_2). \qquad (6)$$

Пусть верно обратное, т.е. для некоторого k выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) \geqslant \hat{c}_k(\lambda_2)$, тогда из (4) имеем:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_k}(J\frac{t'_{0k}f'_k}{(\hat{c}_k(\lambda_1) - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(\hat{c}_k(\lambda_1) - f''_k)^2} \leqslant \frac{1}{a_k}(J\frac{t'_{0k}f'_k}{(\hat{c}_k(\lambda_2) - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(\hat{c}_k(\lambda_2) - f''_k)^2} = \lambda_2,$$

т.е. $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, что противоречит условию $\lambda_1 > \lambda_2$. Таким образом, не существует k, для которого при $\lambda_1 > \lambda_2$ выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) \geqslant \hat{c}_k(\lambda_2)$, и значит для всех $k = 1, \ldots, m$ выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) < \hat{c}_k(\lambda_2)$, т.е. неравенство (6).

Далее, если предположить, что, в противоположность доказываемому утверждению 2, выполняется $\lambda^* > \bar{\lambda}$, то, согласно неравенству (6), имеем

$$\hat{c}_k(\bar{\lambda}) > \hat{c}_k(\lambda^*) = c_k{}^*,$$

а согласно утверждению 1, имеем

$$\hat{c}_k(\bar{\lambda}) \leqslant \bar{c}_k(\bar{\lambda}),$$

т.е.

$$c_k{}^* < \bar{c}_k(\bar{\lambda}),$$

$k = 1, \ldots, m$. Следовательно, выполняется:

$$0 = \sum_{k=1}^{m}(a_k c_k{}^* + b_k) - S < \sum_{k=1}^{m}(a_k \bar{c}_k(\bar{\lambda}) + b_k) - S = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $\lambda^* > \bar{\lambda}$, неверно. Следовательно, утверждение 2 доказано. ■

Таким образом, оптимальное значение $\lambda = \lambda^*$ находится на полуинтервале $(0, \bar{\lambda}]$, т. е. $0 < \lambda^* \leqslant \bar{\lambda}$.

3. Численный метод

Для решения задачи оптимального выбора пропускных способностей каналов транспортировки предлагается эффективный численный метод, основанный на использовании полученных выше оценок и применении дихотомии.

Метод выполняется в следующей последовательности шагов.

1. Выбирается ε_λ — точность вычисления λ^*.

2. Полагаются $\mu = 0$ и $\nu = \bar{\lambda}$.

3. Выбирается средняя точка $\tilde{\lambda} = (\mu + \nu)/2$ текущего интервала локализации λ^*.

4. Решается система уравнений (4) при этом значении $\tilde{\lambda}$. Для этого для каждого $k = 1, \ldots, m$ выполняется последовательность приведенных на шагах 4.1-4.5 действий. В результате решения системы уравнений (4) получается $\hat{c}(\tilde{\lambda}) = (\hat{c}_1(\tilde{\lambda}), \ldots, \hat{c}_m(\tilde{\lambda}))$.

4.1. Выбирается ε_c — точность вычисления $\hat{c}_k(\tilde{\lambda})$.

4.2. Полагаются $\eta = \bar{f}_k$ и $\theta = \bar{c}_k(\tilde{\lambda})$.

4.3. Выбирается средняя точка $c_k = (\eta + \theta)/2$ текущего интервала локализации $\hat{c}_k(\tilde{\lambda})$.

4.4. Если выполняется неравенство

$$J\frac{t'_{0k}f'_k}{(c_k - f'_k)^2} + J\frac{t''_{0k}f''_k}{(c_k - f''_k)^2} - \tilde{\lambda}a_k < 0,$$

то это означает, что $\hat{c}_k(\tilde{\lambda}) < c_k$, т. е. $\hat{c}_k(\tilde{\lambda}) \in (\eta, c_k)$. В этом случае полагается $\theta = c_k$. В противном случае имеет место $\hat{c}_k(\tilde{\lambda}) \geqslant c_k$, т. е. $\hat{c}_k(\tilde{\lambda}) \in [c_k, \theta]$, полагается $\eta = c_k$. Таким образом, длина отрезка локализации корня k-го уравнения (2) уменьшается вдвое.

4.5. Если $\nu - \mu > \varepsilon_\lambda$, то осуществляется переход на шаг 4.3.

5. Если выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k\hat{c}_k(\tilde{\lambda})+b_k)-S<0$, это означает, что $\lambda^* < \tilde{\lambda}$, т.е. $\lambda^* \in (\mu, \tilde{\lambda})$. В этом случае полагается $\nu = \tilde{\lambda}$. В противном случае имеет место $\lambda^* \geqslant \tilde{\lambda}$, т.е. $\lambda^* \in [\tilde{\lambda}, \nu]$, полагается $\mu = \tilde{\lambda}$. Таким образом, длина отрезка локализации λ^* уменьшается вдвое.

6. Если $\nu - \mu > \varepsilon_\lambda$, то осуществляется переход на шаг 3. В противном случае полагается $\lambda^* = \tilde{\lambda}$. При этом $\hat{c}(\lambda^*) = (\hat{c}_1(\lambda^*), \ldots, \hat{c}_m(\lambda^*))$ — искомое решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bell M.G.H., Iida Y.** Transportation Network Analysis. — New York: Wiley, 1997. — 226 p.
2. **Magnanti T., Wong R.** Network design and transportation planning: models and algorithms // Transportation Science. — 1984. — V. 18. — P. 181–197.
3. **Yang H., Bell M.G.H.** Models and Algorithms for Road Network Design: A Review and Some New Developments // Transport Reviews. — 1998. — V. 18. — P. 257–278.
4. **Branston D.** Link capacity functions: a review // Transportation Research. — 1976. — V. 4. — P. 223–236.
5. **Гостев М.В., Хабибуллин Р.Ф.** Об оптимальном выборе пропускных способностей каналов транспортных сетей // Системы управления и информационные технологии. — 2014. — Т. 2.1, Кн 56. — С. 120–124.
6. **Гостев М.В., Хабибуллин Р.Ф.** Об одной задаче оптимального выбора пропускных способностей каналов транспортных сетей // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVII международной конференции. — 2014. — С. 69–72.
7. **Davidson K.B.** A Flow Travel Time Relationship for Use in Transportation Planning // In the proceedings of the 3rd ARRB Conference. — 1966. — V. 4. — P. 183–194.
8. **Davidson K.B.** The theoretical basis of a flow-travel time relationship for use in transportation planning // Australian Road Research. — 1978. — V. 8. — P. 32–35.

REFERENCES

1. **Bell M.G.H., Iida Y.** Transportation Network Analysis. — New York: Wiley, 1997. — 226 p.
2. **Magnanti T., Wong R.** Network design and transportation planning: models and algorithms // Transportation Science. — 1984. — V. 18. — P. 181–197.
3. **Yang H., Bell M.G.H.** Models and Algorithms for Road Network Design: A Review and Some New Developments // Transport Reviews. — 1998. — V. 18. — P. 257–278.
4. **Branston D.** Link capacity functions: a review // Transportation Research. — 1976. — V. 4. — P. 223–236.
5. **Gostev M.V., Khabibullin R.F.** Ob optimal'nom vybore propusknykh sposobnostey kanalov transportnykh setey [On transportation networks links capacity optimal selection] // Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii. — 2014. — №. 2.1, V. 56. — P. 120–124. (in Russian)
6. **Gostev M.V., Khabibullin R.F.** Ob odnoy zadache optimal'nogo vybora propusknykh sposobnostey kanalov transportnykh setey [On a problem of transportation networks links capacity optimal selection] // Proceedings of the XVII International Conference of Theoretical Cybernetics Problems. — 2014. — P. 69–72. (in Russian)
7. **Davidson K.B.** A Flow Travel Time Relationship for Use in Transportation Planning // In the proceedings of the 3rd ARRB Conference. — 1966. — V. 4. — P. 183–194.
8. **Davidson K.B.** The theoretical basis of a flow-travel time relationship for use in transportation planning // Australian Road Research. — 1978. — V. 8. — P. 32–35.